

確率と最小二乗法による土地の境界復元

座標変換の基礎 II

変換の基礎 I では座標変換の基本を中心に
変換の基礎 II では座標変換の種類を中心に解説

座標変換についてですが基本的には最小二乗法による座標変換を境界復元計算に利用しているに過ぎません、座標変換には様々な方法があります。

その方法は測量の専門書や測量プログラムの使用説明書に記載されていますのでそちらで勉強して頂ければよろしいと思います。

ここでは測量学の理論や手法を説明しているのではなくあくまでも境界の復元に特化して解説していくものです。

座標変換とは

前提条件の確認

誤差の基礎や準拠点選択でも説明していますが図面が作られた時に測った点の中から不動点を特定することが前提となります。

筆界の種類によって、管理状況によって、経年変化よってと様々な要因を考えれば最初の調査の段階で不動点を特定することが重要です。

座標変換の意義

正確性

精度の高い復元値が得られること

不変性

誰が復元しても変わらない値が得られること

迅速性

計算に時間が掛からないこと

座標変換の種類

変換の原則は最小二乗法によることです。

境界(筆界)復元を使う座標変換は①ヘルマート変換②アフィン変換③固定変換④外部4点変換の4つです、他にもありますが特定条件の元で使う方法が多いので省略します。

この中で①ヘルマート変換②アフィン変換は準拠点選択にも使っている重要なアイテムです。

ここで取り上げる座標変換は誤差の基礎や準拠点選択でも説明していますが図面が作られた時に測った点の中から不動点を特定することが前提となります。

筆界の種類によって、管理状況によって、経年変化よってと様々な要因を考えれば最初の調査の段階で不動点を特定することが重要です。

その上で始めて準拠点選択から座標変換へと計算行程が進んでいくものです、そして計算に使うデータは実際のデータを使うことです。

座標変換の意義は不変性、誰が復元しても変わらない値が得られること。

迅速性、計算に時間が掛からないことが求められます、座標変換プログラムが無かった2000年以前には計算に多くの時間が掛かりました、区画整理図などでは2週間から4週週間もかかったものです、そのために簡単な計算で済ませた方もおられたようでそれがその地区の復元精度の低下になっています。

今では短時間で様々な検証ができますのでぜひ勉強していただきたいと思います。

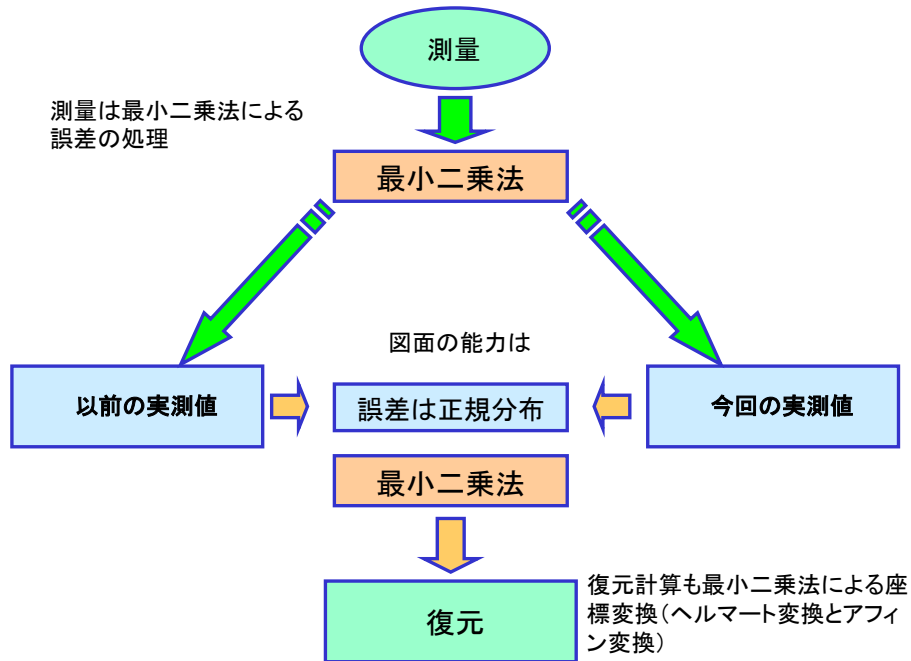
ヘルマート変換は1995年から2000年頃から一般的なり、アフィン変換は2000年から2005年頃から一般的になりました。

固定変換は1995年以前から使われていた手法ですが今はあまり使いません、外部4点補正変換は以前から図面の歪みを取る為に使われている手法です。

後会法による円の交点計算は図解法の名残で今では使われない手法ですが中には未だに使っている方がおります。

(パソコンの普及が劇的に復元手法に貢献していることを認識出来ない方、高齢の調査士、2000年頃に50代以上だった方に多いです。)

復元の原則



測量と復元とは相対で存在しますが基準点測量には復元という概念はありませんでその都度正確に測ることが重要視されます。

筆界の場合は必ず復元という作業が生じます。

測量の計算は最小二乗法によって行われています、結果として図面と現地が存在するこなり、この段階で図面と現地は完全には重なりません。

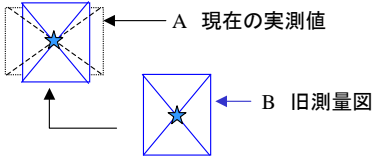
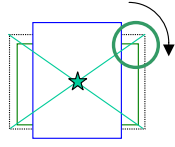
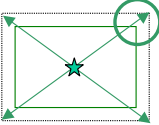
これは測量に誤差が有ると現地に経年変化があるからです、その結果図面と現地に差が生ずることになります、この差の分布は正規分布に従うとされています。

復元の段階では現地を図面より正確に測量する事が原則です、その結果、図面值対実測値の間でも差が生じます。

簡単に言えば現地を挟んで以前に測った値、図面值と今回測った値の実測値が存在します、この双方の誤差を検証して測定の復元、つまり境界や筆界の復元を行なうわけです。

この復元に再び最小二乗法が使われるわけです。

ヘルマート変換イメージ

	<p>点数は3点以上(2点でも出来るが結果は2点法になる) A図をB図に重ねる場合</p> <p>A図の重心(★)とB図の重心(★)を求め重ねる</p>
	<p>A図の各点とB図の各点の離れが平均になる位置まで重心を支点として回転する(離れの大きい点は無視して)</p>
	<p>(コピー機の倍率を使って) 重心から各点の距離を求め 倍率 = $\frac{\text{A図の距離合計}}{\text{B図の距離合計}}$ を求めB図を伸縮させる A図の各点とB図の各点の離れが均等になるよう調整する(離れの大きい点は無視して)</p>

実際の計算ではこのイメージに沿って計算されるのではなくあくまでも説明用のイメージです。

ヘルマート変換は図面のX軸とY軸、実測値のX軸とY軸が直交している場合に使います。

伸縮を取る場合はヘルマート変換という座標変換を使います。

ここではヘルマート変換について概念的に説明します。

ヘルマート変換は最小二乗法の一つで基本は相似形の移動、回転、伸縮です。

移動、回転は座標軸の違いによって起きますので特に問題ではありません。

計算上は一括で行いますので個別に計算するわけではありません。

ヘルマート変換は2点から変換出来ますが2点で比例計算と同じでないなり交点計算と同じ結果が得られます、最小二乗法による場合は3点以上の準拠点が必要です。

基本的にはここに書いてあるとおり図の変形なのでコピー機で体験できます。

最小二乗法による場合は基準とする点(準拠点)が3点以上必要です、二点の場合は単なる比例計算になります。

ヘルマート変換式

n個の準拠点の図面值と実測値

図面值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

実測値 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$

変換式は

$$X = ax + by + c$$

$$Y = -bx + ay + d$$

係数の値は

$$a = \frac{[x][X] + [y][Y] - n[xX + yY]}{[x]^2 + [y]^2 - n[x^2 + y^2]}$$

$$b = \frac{[y][X] - [x][Y] - n[yX - xY]}{[x]^2 + [y]^2 - n[x^2 + y^2]}$$

$$c = \{[X] - a[x] - b[y]\} / n$$

$$d = \{[Y] + b[x] - a[y]\} / n$$

スケールファクター

$$\text{伸縮率 } u = \sqrt{a+b}$$

$$\text{回転量 } \theta = \tan^{-1}(b/a)$$

X軸Y軸の平行移動量: e, f

標準偏差: 誤差の基礎を参考に

パラメータは4

[]カッコ内の総和

式を載せると何となくプロっぽい資料になるね

現実にはヘルマート変換式を知ったからどうなることでもありませんし、測量の本には式が載っています。

あえて計算式を書いてみました。

スケールファクターに注目してください、特に標準偏差は重要です。

福永先生の「14条地図活用マニュアル」の91ページから引用させて頂きました、重み付きヘルマート変換式は151ページにありますのでご参考ください。

これをプログラムにしたのが次のスライドです。

ヘルマート変換の例

係数

パラメータ

標準偏差

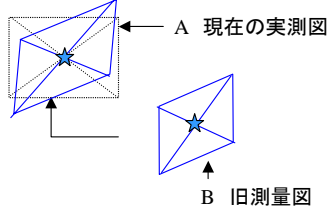
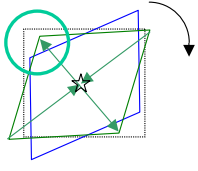
ヘルマート変換 & x²検定準拠点選択

事件名										
係数a	1.000087	伸縮率	1.000087	平均二乗誤差	0.014					
係数b	0.000118	指定伸縮率	<input type="text" value="1.000"/>	AIC	98					
移動量x	355.236	回転角	0° 0' 24"	標準偏差	0.010					
移動量y	-293.625	指定数		尖度	0.44					
21		指定数までリセット	19	準拠点をアフィンAICへ	空欄の実測値戻す	H	点名セット	19		
変換される座標値(図面値)				変換の基となる座標値(実測値)			変換された座標値			
点番	点名	X	Y	準拠点	点名	X	Y	点名	X	Y
1	K3	-779.394	483.344	○ G3		-424.172	189.861	HK3	-424.169	189.853
2	K4	-791.187	481.567	○ G4		-435.973	188.102	HK4	-435.963	188.077
3	K5	-801.897	481.031	○ G5		-446.672	187.553	HK5	-446.674	187.542
4	K6	-809.298	492.684	○ G6		-454.059	199.208	HK6	-454.074	199.197
5	K7	-810.720	499.164	○ G7		-455.497	205.662	HK7	-455.496	205.678
6	K8	-814.840	509.566	○ G8		-459.616	216.083	HK8	-459.615	216.081
7	K9	-815.759	512.602	○ G9		-460.540	219.119	HK9	-460.533	219.118
8	K10	-811.427	514.613	○ G10		-456.210	221.123	HK10	-456.201	221.128
9	K11	-804.702	517.667	○ G11		-449.476	224.200	HK11	-449.475	224.182
10	K12	-801.028	519.014	○ G12		-445.796	225.527	HK12	-445.800	225.529
11	K13	-800.047	519.321	○ G13		-444.816	225.838	HK13	-444.819	225.836
12	K14	-797.512	519.894	○ G14		-442.284	226.405	HK14	-442.284	226.408

準拠点選択には伸縮率はfureeで行います。

パラメータに注目します、ヘルマート変換の場合は伸縮率と標準偏差が重要です。

アフィン変換イメージ 1

 <p>A 現在の実測図</p> <p>B 旧測量図</p>	<p>点数は4点以上(3点でも出来るが結果は2点法になる)</p> <p>A図をB図に重ねる場合</p> <p>A図の重心(★)とB図の重心(★)を求め重ねる</p>
	<p>A図の各点とB図の各点の離れが平均になる位置まで重心を支点として回転する(離れの大きい点は無視して)</p> <p>B図の歪方向を確認する</p>

アフィン変換は主に図面のX軸とY軸、現地X軸とY軸が直交していない場合、あるいはx軸の伸縮とy軸の伸縮が異なる場合に使います。

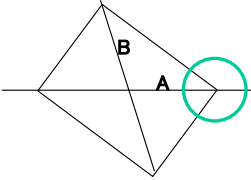
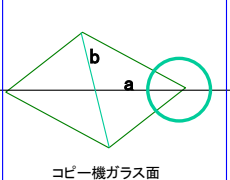
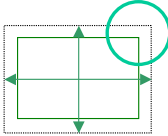
図面の作成が平板で測量が行われていた場合、トラバース測量でスチールテープでの測距がなされていた場合で測距、測角が正確でない場合に使います。

アフィン変換は3点から変換出来ますが3点で比例計算と同じでないなり最小二乗法による場合は4点以上の準拠点が必要です。

この歪みをとる場合にアフィン変換という最小二乗法による座標変換を使います。

図の重心と現地を実測した図の重心を移動、回転で重ねます、ここまではヘルマート変換と同じです。

アフィン変換イメージ 2

<p>A 現在の実測図</p> 	<p>B 旧測量図</p> 	<p>(コピー機の縦倍率、横倍率を使って伸縮させます、ガラス面に対して長辺を横に置きます)</p>
<p>横倍率 = $(a+b) \times A / (A+B) / a$ 縦倍率 = $(a+b) \times B / (A+B) / b$</p> <p>A図の各点とB図の各点の離れが平均になるよう横倍率、縦倍率を変えながら微調整する(離れの大きい点は無視して)</p>		
	<p>A図の縦長さ、B図の縦長さを測って縦倍率、A図の横長さとB図の横長さを測って横倍率で伸縮させる その後各点の離れが均等になるように調整する(離れの大きい点は無視して)</p>	

実際の計算ではこのイメージに沿って計算されるのではなくあくまでも説明用のイメージです。

ヘルマート変換との違いはここからで、対角方法への伸縮をして図のつぶれ除いた後、縦方向の伸縮、横方向の伸縮を行います。
 計算上は一括で行いますので個別に計算するわけではありません。
 実際には自分でコピー機を使って体験してもらえれば理解できると思います。

アフィン変換式 1

n個の準拠点の図面值と実測値

図面值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

実測値 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$

変換式は

$$X = ax + by + e$$

$$Y = -cx + dy + f$$

係数の値は

$$a = \frac{\{(Xx)(yy) - (Xy)(xy)\}}{k}$$

$$b = \frac{\{(Xy)(xx) - (Xx)(xy)\}}{k}$$

$$c = \frac{\{(Yy)(xy) - (Yx)(yy)\}}{k}$$

$$d = \frac{\{(Yy)(xx) - (Yx)(xy)\}}{k}$$

$$e = \frac{([X] - a[x] - b[y])}{n}$$

$$f = \frac{([Y] + c[x] - d[y])}{n}$$

$$k = (xx)(yy) - (xy)^2$$

[]カッコ内の総和

アフィン変換式も同じで知ったからどうなることでもありませんがあえて計算式を書いてみました。

福永先生の「14条地図活用マニュアル」の140、141ページから引用させて頂きましたのでご参考ください。

アフィン変換式 2

$$(Xx) = n[Xx] - [X][x] = n(X_1x_1 + X_2x_2 + \dots + X_nx_n) - (X_1 + X_2 + \dots + X_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$(Xy) = n[Xy] - [X][y] = \text{前式に準ずる}$$

$$(Yx) = n[Yx] - [Y][x] = \text{前式に準ずる}$$

$$(Yy) = n[Yy] - [Y][y] = \text{前式に準ずる}$$

$$(xx) = n[xx] - [x]^2 = \text{前式に準ずる}$$

$$(yy) = n[yy] - [y]^2 = \text{前式に準ずる}$$

$$(xy) = n[xy] - [x][y] = \text{前式に準ずる}$$

スケールファクター

$$X \text{軸の伸縮率 } u_x = \sqrt{a+b}$$

$$Y \text{軸の伸縮率 } u_y = \sqrt{c+d}$$

$$X \text{軸の回転量 } \theta_x = \tan^{-1}(b/a)$$

$$Y \text{軸の回転量 } \theta_y = \tan^{-1}(c/d)$$

X 軸 Y 軸の平行移動量: e, f

標準偏差: 誤差の基礎を参考に

パラメータは6

スケールファクターに注目してください、特に標準偏差は重要です。

アフィン変換の例

事件名		係数		パラメータ		標準偏差	
係数a	1.000589	移動量x	355.619	伸縮率x	1.000589	平均二乗誤差	0.022
係数b	0.000148	移動量y	-293.778	伸縮率y	0.999608	AIC	130
係数c	0.000608			回転角x	0° 0' 31"	標準偏差	0.016
係数d	0.999607			回転角y	0° 2' 6"	尖度	3.32
21		指定数までリセット		準拠点をヘルマートAICへ 空欄の実測値戻す		a	
21		指定数までリセット		準拠点をヘルマートAICへ 空欄の実測値戻す		a	
変換される座標値(図面値)				変換の基となる座標値(実測値)			
点番	点名	X	Y	準拠点	点名	X	Y
1	K3	-779.394	483.344	○	G3	-424.172	189.861
2	K4	-791.187	481.567	○	G4	-435.973	188.102
3	K5	-801.897	481.031	○	G5	-446.672	187.553
4	K6	-809.298	492.684	○	G6	-454.059	199.208
5	K7	-810.720	499.164	○	G7	-455.497	205.662
6	K8	-814.840	509.566	○	G8	-459.616	216.083
7	K9	-815.759	512.602	○	G9	-460.540	219.119
8	K10	-811.427	514.613	○	G10	-456.210	221.123
9	K11	-804.702	517.667	○	G11	-449.476	224.200
10	K12	-801.028	519.014	○	G12	-445.796	225.527
11	K13	-800.047	519.321	○	G13	-444.816	225.838
12	K14	-797.512	519.894	○	G14	-442.284	226.405

パラメータに注目します、伸縮率と標準偏差に注目し、同じデータでヘルマート変換との比較をしてください。

同じデータセットの比較ではアフィン変換での標準偏差が小さく出ます、パラメータの関係です、どちらが優位かは標準偏差では判断せずにAICで判断します。

固定変換イメージ

<p>A 現在の実測値 B 旧測量図</p>	<p>固定点は原則1点(2点でも出来るが2では2点の重心空の回転に伸縮になる) A図をB図に重ねる場合</p> <p>A図の固定点(★)とB図の固定点(★)を求め重ねる</p>
<p>B 回転</p>	<p>固定点を中心としてB図の各点の離れが平均になる位置まで回転する(離れの大きい点は無視して)</p>
<p>B 伸縮</p>	<p>固定点から各点の距離を求め 倍率=A図の距離合計/B図の距離合計 を求めB図を伸縮させる A図の各点とB図の各点の離れが均等になるよう調整する(離れの大きい点は無視して)</p>

実際の計算ではこのイメージに沿って計算されるのではなくあくまでも説明用のイメージです。

固定する点の位置は何処でも構いませんが原則は1点を固定してその点を中心に回転、伸縮を掛けます。

特定の1点、又は2点を固定して変換をするもので考え方としてはあるが現実には固定する点に位置誤差がないことはありえないので現在では使われない。

しかし、特定の地主さんに特定の1点、又は2点を固定して変換を求められたときに使える。

ヘルマート変換では固定は一点ではできないがこれならできる・・・変な利点ではあるが？。

同じデータをヘルマート変換、アフィン変換と比べると精度が落ちる、基準にした点にも位置誤差はあるのだから。

固定変換と例

スケールファクター
 伸縮率 $u = \sqrt{a+b}$
 回転量 $\theta = \tan^{-1}(b/a)$
 X 軸 Y 軸の平行移動量: e, f
 標準偏差: 誤差の基礎を参考に
 パラメータは4

異常点は除く
 Z1を固定して
 標準偏差

固定変換計算

事件名	x	y	移動量x	-0.013	実伸縮率	1.000407	ベクトル σ_s	0.0167
図面重心	98132.033	-12812.170	移動量y	0.014	係数		AIC	54
実測重心	98132.046	-12812.184			回転角	-0° 1' 7"	二次元 σ	0.0118

変換される座標値(図面值)				指定数		変換の基となる座標値(実測値)				K		変換された座標値	
点名	x	y	標準点	固定点	点名	X	Y	点名	X	Y			
1 z1	98132.033	-12812.170	○	○	g1	98132.046	-12812.184	Kz1	98132.046	-12812.184			
2 z2	98074.220	-12792.521	○		g2	98074.220	-12792.518	Kz2	98074.216	-12792.508			
3 z3	98079.396	-12798.465	○		g3	98079.379	-12798.469	Kz3	98079.392	-12798.456			
4 z4	98084.969	-12798.969	○		g4	98084.964	-12798.955	Kz4	98084.967	-12798.962			
5 z5	98093.863	-12798.901	○		g5	98093.857	-12798.889	Kz5	98093.865	-12798.897			
6 z6	98095.638	-12798.189	○		g6	98095.627	-12798.188	Kz6	98095.641	-12798.185			
7 z7	98115.828	-12798.162	○		g7	98115.812	-12798.155	Kz7	98115.839	-12798.165			
8 z8	98147.233	-12796.223	○		g8	98147.234	-12796.233	Kz8	98147.257	-12796.235			
9 z9	98137.638	-12833.485	○		g9	98137.608	-12833.489	Kz9	98137.646	-12833.510			
10 z10	98131.510	-12836.571			g10	98131.511	-12836.576	Kz10	98131.515	-12836.595			

特定の1点、又は2点を固定して変換をするもので考え方としてはあるが現実には固定する点に位置誤差がないことはありえないので現在では使われない。
 しかし、特定の地主さん特定の1点、又は2点を固定して変換を求められたときに使える。
 ヘルマート変換では固定は一点ではできないがこれならできる・・・変な利点ではあるが？
 同じデータをヘルマート変換、アフィン変換と比べると精度が落ちる、基準にした点にも位置誤差はあるのだから。

外部4点補正変換と例



地図 四点補正プログラム

図面読取り値			ピッチ		図郭orトンボの値		1回目アフィン結果		変換値(最終調整値)							
象限	点名	X	Y	象限	X	Y	X	Y	点名	X	Y					
11		1005.876	1041.536	1	1023.627	1102.544	1023.521	1102.621	1	1023.627	1102.544					
22		890.841	1042.285	2		1102.544	897.734	1102.466	2	897.627	1102.544					
33		889.784	928.164	3		977.544	897.521	977.621	3	897.627	977.544					
44		1005.206	927.129	4		1023.627	1023.733	977.467	4	1023.627	977.544					
番号																
17		964.174	1026.674	図面の読取り値は図面北東角を1として時計回りに2,3,4の順で入力してください。 始めに4点でのアフィン変換をしますので ①図面の潰れ方向の歪が修正されます。 ②図面の縦方向と横方向の伸びが修正されます。 次にアフィン変換で修正できない小さい歪を 図面を4分割して内挿(比例按分)で補正します。 第一象限のトンボまたは図郭値を入力し ピッチを入力すると2,3,4象限の値が確定します。								978.046	1086.011	7	978.075	1085.954
210		1001.838	1018.531									1019.295	1077.422	10	1019.395	1077.376
313		943.628	940.178									956.295	991.219	13	956.302	991.159
415		901.133	952.781									909.726	1004.646	15	909.812	1004.602
516		973.961	931.171	989.536	981.624	16	989.487	981.696								
617		973.790	929.861	989.294	980.189	17	989.246	980.263								
719		970.074	979.105	984.890	1034.025	24	984.849	1034.033								
826		961.453	972.639	987.385	1027.049	26	987.324	1027.065								
934		991.637	970.033	1008.542	1024.284	34	1008.462	1024.304								
1035		993.929	967.121	1011.072	1021.118	35	1010.988	1021.142								
1123		994.262	973.923	1011.380	1028.562	23	1011.295	1028.576								
12101		980.547	967.791	996.435	1021.738	101	996.376	1021.760								
13102		968.326	971.235	983.044	1025.402	102	983.006	1025.420								
14103		959.437	973.627	978.305	1027.943	103	978.293	1027.958								
15104		953.392	975.354	966.681	1029.781	104	966.670	1029.794								
16105		945.086	939.769	957.904	990.784	105	957.908	990.723								
17106		949.102	938.543	962.294	989.477	106	962.291	989.540								
18																
19																
20																
21																
22																
23																
24																
25																
26																
27																
28																

変換しようとする点の外側に4点の固定点を配置して変換するもので現在は図解法による図面の変形を除く場合に使用が限定されている。

外部の点は図郭の四隅の4点又はトンボを基準に変換を行う、任意の4点でも変換できるが4点に位置誤差がないことが条件になるので任意の点では使わない。

ここで紹介するプログラムははじめにアフィン変換をして変換後の位置誤差を図を4分割した上で内層をしている。

図解法による地籍図の読み取り座標値の歪取り使うことが多い。

パラメータは6+2で8か？

座標変換方法の選択 AIC(赤池情報量基準)

ヘルマート変換かアフィン変換かどっちが適している？

モデル選択の基準として現在もっとも標準的に使われている赤池のAICモデル検定式を使う。

電卓ではlogをLn(σ^2) と押す。

$$\text{AIC モデル検定式 } AIC = n \times \log(\sigma^2, e) + 2(m + 1)$$

σ は標準偏差、n は観測値数(準拠点数)

mはパラメータ数(ヘルマート変換は4、アフィン変換は6)

AIC は、モデル選択(model selection)の立場から作られた指標であり、同一のデータセットに対して、複数のモデルを考え、AIC 最小のモデルを選択する、2つの差が1を超えれば有意

平板測量の図面はアフィン変換が適している。

標定が正確でない為です。

区画整理図のように図面に基づいて現地が作られている場合はヘルマート変換が適している。

図に歪みがない為です。

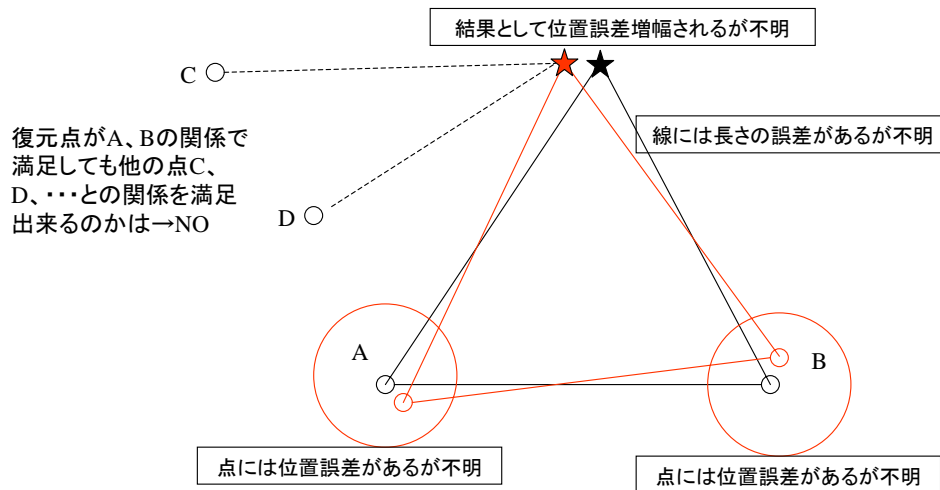
最小二乗法による変換はヘルマート変換とアフィン変換です、このどちらが優位か迷うことがあります、この場合赤池のモデル検定式を使ってAICを計算し判断するのが一般的です。

AICは次の式で計算します、同一点の組み合わせでヘルマート変換とアフィン変換のAICを計算し数値の差が1を超えれば数値の小さい変換方法を採用します。

概念的には現地の座標軸と図面の座標軸の直行性で判断されるわけですが、このことから公図、平板作成図面は図に歪があるのでアフィン変換が適しています、区画整理図のように図面を基に現地が作られているときはヘルマート変換が適しています、ただし現地在が広範囲に歪んでいる場合はアフィン変換になると思います。

後会法による円の交点計算イメージ

もともとは平板測量、図解法の図面の復元に使われた手法



一般的に言われる二円の交点計算で三円でも結果はそれほど変わりませんが。

交点計算の問題は基準とする点、準拠点の位置誤差が分からないこ、計算に使う長さの誤差が分からないことです、そのために計算された点の位置誤差も予測できない問題があります。

もともとは平板測量、図解法の図面の復元に使われた手法で現在の座標で誤差を論ずるレベルでは使用されないはずなのですが。

ただし、限定的に残っている点が二点のみの場合に使うことがあるが境界復元といえるものではない。

危険性については「交点計算の注意」のファイルを見てください。